Série N^{o}4 : Matrices, déterminant, inverse d'une matrice et sytèmes

Exercice 1

1. Montrer que tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme

$$z = x + y(1 + \mathrm{i}) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

2. Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des matrices de la forme

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+2y \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que l'application $\Phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{K}$ qui à tout $z = x + y(1+\mathrm{i}) \in \mathbb{C} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ associe $\begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+2y \end{pmatrix}$ est une bijection.

3. (a) Montrer que, pour tout $(z', z'') \in \mathbb{C}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \Phi(z' + z'') &= \Phi(z') + \Phi(z''), \\ \Phi(z'z'') &= \Phi(z')\Phi(z''). \end{aligned}$$

   (b) En déduire que $(\mathcal{K}, +, \times)$ est un corps commutatif.

   (c) Calcucler explicitement M^{-1} pour

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+2y \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}.$$

Exercice 2

On appelle matrice de rotation toute matrice associée à une rotation d'angle θ donnée par

$$G_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

1. Déterminer les matrices G_θ^m pour tout entier $m \geq 1$.
2. Montrer que pour toute $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice G_θ est inversible,

Exercice 3

Soit A la matrice donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. La matrice A est-elle inversible

Exercice 4

Considérons la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

Exercice 5

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & t & u \\ t & 1 & u \\ u & t & 1 \end{pmatrix}, \qquad \forall t, u \in \mathbb{R}$

1. Montrer que "$det(A)$" est un produit de facteurs du premier degré en t et u.
2. Trouver une relation entre t et u pour que la matrice A soit inversible.
3. résoudre et discuter selon les valeurs de t et u le système

$$\left\{\begin{array}{l} x+ty+uz=0 \\ tx+y+uz=0 \\ ux+ty+z=0 \end{array}\right.$$

   Indiquer le rang du système dans chacun des cas examinés.

Exercice 6

1. Résoudre le système d'équations linéaires sur le corps des réels $\mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+ty+z & = & 3 \\ x-y+3z & = & 8 \\ x+2y-z & = & -3 \end{array}\right.$$

2. Le système suivant d'équations linéaires sur le corps $\mathbb{R}$ admet-il des solutions

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x+y+z & = & 3 \\ x-y+3z & = & 8 \\ x+2y-z & = & -3 \\ x+y+2z & = & -1 \end{array}\right.$$

Exercice 7

Sous quelle condition le système d'équations linéaires sur $\mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y+az+a^2t & = & 1 \\ x+a^2z+at & = & -1 \\ ax+a^2y+t & = & 1 \\ a^2x+ay+z & = & 1 \end{array}\right.$$

admet-t-il une solution unique ? Résoudre, dans ce cas, le système.